Лінійна алгебра

Група 121
Викладач Котова О.
1.04.2020 р.

Лекція

Тема: Лінійні оператори.

План

1. Означення оператору у векторному просторі.
2. Лінійний оператор. Означення. Приклади.
3. Властивості лінійних операторів.
4. Задання лінійного оператора за допомогою відображення базису.
5. Матриця лінійного оператора.

Короткий зміст лекції:

В теорії лінійних просторів важливу роль відіграють *лінійні оператори*, які ще називають *лінійним «перетворенням»* простору.

Означення. У векторному просторі L заданий оператор, якщо вказано правило (закон), за яким кожному вектору $\vec{x} \in L$ ставиться у відповідність деякий вектор $\vec{x}' \in L$. Вектор $\vec{x}'$ називають образом вектора $\vec{x}$, а $\vec{x}$ - прообразом вектора $\vec{x}'$.

Отже, оператор у векторному просторі L - це функція, множиною визначення і множиною значень якої є простір L.

Оператори позначають буквами $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \ldots, \varphi, \psi, f$.

Образ вектора $\vec{x}$ при дії оператора $\mathcal{A}$ позначають символом $\vec{x}' = \vec{x}\mathcal{A}$.

Оператори в просторі L називають ще операторами простору L, перетвореннями простору L, відображенням простору L в себе.

Означення. Оператор $\mathcal{A}$ в векторному просторі L називають *лінійним*, якщо він задовольняє наступним умовам:

1. $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L \quad (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \cdot \mathcal{A} = \vec{x}_1 \cdot \mathcal{A} + \vec{x}_2 \cdot \mathcal{A}$;
2. $\forall \vec{x} \in L \quad (\lambda \vec{x}) \cdot \mathcal{A} = \lambda \cdot (\vec{x}\mathcal{A})$.

Лінійні оператори в просторі L називають також *лінійними перетвореннями* простору L.

Із означення лінійного оператора випливають наступні *властивості*:

1. Будь-який лінійний оператор $\mathcal{A}$ в просторі L залишає нерухомим нульовий вектор $\vec{0}$ цього простору.
2. Будь-який лінійний оператор $\mathcal{A}$ в просторі L протилежному вектору $-\vec{x}$ довільного вектора $\vec{x}$ ставить у відповідність вектор, протилежний образу вектора $\vec{x}$.
3. Лінійний оператор $\mathcal{A}$ в просторі L будь-якій лінійній комбінації довільно вибраних векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ простору L ставить у відповідність лінійну комбінацію (з тими ж коефіцієнтами) образів цих векторів.

З'ясуємо, якими елементами можна задати лінійний оператор в просторі L_n.

Задати лінійний оператор $\mathcal{A}$ в просторі L_n - це означає задати образи всіх векторів кожного базису цього простору.

Якщо відомі образи всіх векторів одного з базисів простору L_n при дії оператора $\mathcal{A}$, то можна знайти образи всіх векторів простору при дії цього оператора.

Теорема 1. Будь-який оператор $\mathcal{A}$ в просторі L_n однозначно визначається заданням образів $\vec{e}_1\mathcal{A}, \vec{e}_2\mathcal{A}, ..., \vec{e}_n\mathcal{A}$ всіх векторів будь-якого фіксованого базису $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ цього простору.

Доведення: Нехай $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ - один з базисів простору L_n, тоді $\forall \vec{x} \in L_n$ можна представити $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + ... + \lambda_n\vec{e}_n$, де $\lambda_i \in R$.

Подіємо на вектор $\vec{x}$ лінійним оператором $\mathcal{A}$:

$$\vec{x}\mathcal{A} = (\lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + ... + \lambda_n\vec{e}_n) = \lambda_1(\vec{e}_1\mathcal{A}) + \lambda_2(\vec{e}_2\mathcal{A}) + ... + \lambda_n(\vec{e}_n\mathcal{A})$$

Нехай вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$ - образи векторів базису при дії лінійного оператора $\mathcal{A}$, тоді

$$\vec{x}\mathcal{A} = \lambda_1\vec{b}_1 + \lambda_2\vec{b}_2 + ... + \lambda_n\vec{b}_n.$$

Отже, образ вектора $\vec{x}$ визначається і до того ж однозначно.

Теорема 2. Якою б не була впорядкована система з n векторів простору L_n

$$\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n, \qquad (*)$$

існує, і до того ж тільки один, лінійний оператор $\mathcal{A}$ простору L_n такий, що вектори системи (*) будуть образами векторів базису $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ при дії цього оператора.

Доведення: Довільний вектор $\vec{x} \in L_n$ в базисі $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ має вигляд $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + ... + \lambda_n\vec{e}_n$.

Вектору $\vec{x}$ поставимо у відповідність вектор $\vec{x}' = \lambda_1\vec{c}_1 + \lambda_2\vec{c}_2 + ... + \lambda_n\vec{c}_n$.

Оскільки вектор $\vec{x}$ виражається через вектори базису однозначно, то йому у відповідність ставиться тільки один вектор $\vec{x}'$.

Отже, задана так відповідність є оператором в просторі L_n, позначимо його через $\mathcal{A}$.

Тоді $\vec{x}\mathcal{A} = \vec{x}' = \lambda_1\vec{c}_1 + \lambda_2\vec{c}_2 + ... + \lambda_n\vec{c}_n$. Оператор $\mathcal{A}$ - лінійний.

Дійсно, нехай

$$\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + ... + \lambda_n\vec{e}_n$$
$$\vec{y} = \gamma_1\vec{e}_1 + \gamma_2\vec{e}_2 + ... + \gamma_n\vec{e}_n$$

тоді $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} = (\lambda_1\alpha + \gamma_1\beta)\vec{e}_1 + (\lambda_2\alpha + \gamma_2\beta)\vec{e}_2 + ... + (\lambda_n\alpha + \gamma_n\beta)\vec{e}_n$

$$\begin{aligned}(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y})\mathcal{A} &= (\lambda_1\alpha + \gamma_1\beta)\vec{e}_1\mathcal{A} + (\lambda_2\alpha + \gamma_2\beta)\vec{e}_2\mathcal{A} + ... + (\lambda_n\alpha + \gamma_n\beta)\vec{e}_n\mathcal{A} = \\ &= (\lambda_1\alpha + \gamma_1\beta)\vec{c}_1 + (\lambda_2\alpha + \gamma_2\beta)\vec{c}_2 + ... + (\lambda_n\alpha + \gamma_n\beta)\vec{c}_n = \\ &= (\lambda_1\alpha\vec{c}_1 + \lambda_2\alpha\vec{c}_2 + ... + \lambda_n\alpha\vec{c}_n) + (\gamma_1\beta\vec{c}_1 + \gamma_2\beta\vec{c}_2 + ... + \gamma_n\beta\vec{c}_n) = \\ &= \alpha(\lambda_1\vec{c}_1 + \lambda_2\vec{c}_2 + ... + \lambda_n\vec{c}_n) + \beta(\gamma_1\vec{c}_1 + \gamma_2\vec{c}_2 + ... + \gamma_n\vec{c}_n) = \\ &= \alpha \cdot (\vec{x}\mathcal{A}) + \beta \cdot (\vec{y}\mathcal{A}).\end{aligned}$$

Оператор $\mathcal{A}$ відображає вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ у вектори $\vec{c}_1, \vec{c}_2, ..., \vec{c}_n$. Дійсно, оскільки $i-$а координата вектора $\vec{e}_i$ в базисі $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ дорівнює 1, а всі інші його координати дорівнюють нулю, то $\vec{e}_i \mathcal{A} = \vec{c}_i \quad (i = \overline{1, n})$.

Отже, заданий оператор $\mathcal{A}$ задовольняє вимогам теореми 2, а за теоремою 1, такий оператор існує тільки один. Теорему доведено.

Нехай $\mathcal{A}$ - деякий лінійний оператор в L_n, $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ - будь-який базис цього простору. Оператор $\mathcal{A}$ відображає вектори цього базису в деякі вектори $\vec{e}_1 \mathcal{A}, \vec{e}_2 \mathcal{A}, ..., \vec{e}_n \mathcal{A}$ кожний з яких одночасно виражається через вектори базису B.

Нехай

$$\begin{aligned}
&\vec{e}_1 \mathcal{A} = \alpha_{11} \vec{e}_1 + \alpha_{12} \vec{e}_2 + ... + \alpha_{1n} \vec{e}_n, \\
&\vec{e}_2 \mathcal{A} = \alpha_{21} \vec{e}_1 + \alpha_{22} \vec{e}_2 + ... + \alpha_{2n} \vec{e}_n, \\
&\text{...} \\
&\vec{e}_n \mathcal{A} = \alpha_{n1} \vec{e}_1 + \alpha_{n2} \vec{e}_2 + ... + \alpha_{nn} \vec{e}_n.
\end{aligned}$$

З коефіцієнтів α_{ik} складаємо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

рядками якої є координатні рядки векторів $\vec{e}_i \mathcal{A} \ (i = \overline{1, n})$ в базисі $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$.

Оскільки координатні рядки векторів $\vec{e}_i \mathcal{A}$ визначаються однозначно, то і матриця A визначається оператором $\mathcal{A}$ однозначно.

Матрицю A називають <u>*матрицею лінійного оператора* $\mathcal{A}$</u> в базисі $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$.

Отже в базисі B лінійний оператор $\mathcal{A}$ задається матрицею A.

При фіксованому базисі B кожному лінійному оператору $\mathcal{A}$ простору L_n відповідає певним способом визначена матриця $n-$ого порядку – матриця цього лінійного оператора.

І, навпаки, кожна матриця $n-$ого порядку $B = (\beta_{ik})$ є матрицею деякого лінійного оператора простору L_n в базисі $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$.

Дійсно, знаючи матрицю $B = (\beta_{ik})$, знайдемо вектори:

$$\begin{aligned}
&\vec{b}_1 = \beta_{11} \vec{e}_1 + \beta_{12} \vec{e}_2 + ... + \beta_{1n} \vec{e}_n, \\
&\vec{b}_2 = \beta_{21} \vec{e}_1 + \beta_{22} \vec{e}_2 + ... + \beta_{2n} \vec{e}_n, \\
&\text{..} \\
&\vec{b}_n = \beta_{n1} \vec{e}_1 + \beta_{n2} \vec{e}_2 + ... + \beta_{nn} \vec{e}_n.
\end{aligned}$$

за теоремою 2 визначимо лінійний оператор.

В просторі L_n, який вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ відображає відповідно у вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n$. Оператор $\mathcal{B}$ - єдиний, його матрицею в базисі $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ є матриця B.

Отже, якщо в лінійному просторі L_n над полем P обрано базис $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ і кожному оператору $\mathcal{A}$ простору L_n поставлено у відповідність матрицю A цього оператора в базисі $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$, то цим буде встановлена взаємно-однозначна відповідність між всіма лінійними операторами простору L_n і всіма матрицями $n-$ого порядку над полем P.

Контрольні питання для самоперевірки

1. Що називається оператором?
2. Який оператор називається лінійним?
3. Доведіть властивості лінійного оператора.
4. Як визначається лінійний оператор $\mathcal{A}$ в L_n?
5. Які вектори простору L_n можуть бути образами векторів базису $B < \vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n >$ при дії лінійних операторів в цьому просторі?
6. Що собою являє матриця лінійного оператора?
7. Доведіть, що проектування трьохвимірного простору на координатну площину векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ паралельно осі координат вектора $\vec{e}_3$ є лінійним оператором і знайти його матрицю в базисі $< \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 >$.
8. Нехай $\mathcal{A}$ - оператор, який кожному многочленну $f(x)$ з дійсними коефіцієнтами ставить у відповідність його похідну $f'(x)$, тобто $f(x)\mathcal{A} = f'(x)$. Довести, що оператор $\mathcal{A}$ лінійний. Знайти його матрицю в базисі:
   а) $1, x, x^2, ..., x^n$;
   б) $1, (x-c), \frac{(x-c)^2}{2!}, ..., \frac{(x-c)^n}{n!}$, де c – дійсне число.
9. Показати, що множення квадратних матриць другого порядку а) зліва, б) справа на дану матрицю $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ є лінійними операторами простору всіх матриць другого порядку, і знайти матриці цих операторів в базисі $< \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} >$.
10. З'ясувати, які з наступних операторів φ, заданих через координати вектора $\vec{x}\varphi$ як функції координат вектора $\vec{x}$, є лінійними, і у випадку лінійності знайти їх матриці у тому ж базисі, в якому задані координати векторів $\vec{x}$ і $\vec{x}\varphi$
    а) $\vec{x}\varphi = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$;
    б) $\vec{x}\varphi = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$;
    в) $\vec{x}\varphi = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$;

г) $\vec{x}\varphi = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

11. Довести, що існує єдиний лінійний оператор трьохвимірного простору, який переводить вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ відповідно у $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$, і знайти матрицю цього оператора в тому ж базисі, в якому задані координати всіх векторів:

    $\vec{a}_1 = (2, \quad 3, \quad 5), \qquad \vec{b}_1 = (1, \quad 1, \quad 1),$

    $\vec{a}_2 = (0, \quad 1, \quad 2), \qquad \vec{b}_2 = (1, \quad 1, \quad -1),$

    $\vec{a}_3 = (1, \quad 0, \quad 0), \qquad \vec{b}_1 = (2, \quad 1, \quad 2).$

12. Довести, що перетворення трьохвимірного простору $\vec{x}\varphi = (\vec{x}, \vec{a})\vec{a}$, де $\vec{a}(1,2,3)$ є лінійним перетворенням, і знайти його матриці в ортонормованому базисі $<\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3>$ в якому задані координати всіх векторів, і в базисі

    $$\vec{b}_1 = (1, \quad 0, \quad 1) \quad \vec{b}_2 = (2, \quad 0, \quad -1) \quad \vec{b}_3 = (1, \quad 1, \quad 0).$$

Література:

С. Г. Завало та інші, Алгебра і теорія чисел, Ч. I – К.: Вища шк., 1974, Гл. VIII §32.1; 32.2; 32.3.